第 4 章　数学Ⅲ

解答のヒント

122

(2)　$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \leqq 2$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ と直線 $y=2$ の間の部分を直線 $y=2$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\int_a^b \pi\{2-f(x)\}^2\,dx.$$

123

(2)　(1)の不等式から，次の公式が使える形を作る．

$$\sum_{k=n}^{m-1}(A_{k+1}-A_k)=A_m-A_n$$

124

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ とする．

$$a \leqq x \leqq b,\quad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

で表される領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 は，

$$V_1=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx.$$

$c \leqq y \leqq d$ において，$g(y) \geqq 0$ とする．

$$c \leqq y \leqq d,\quad 0 \leqq x \leqq g(y)$$

で表される領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 は，

$$V_2=\int_c^d \pi\{g(y)\}^2\,dy.$$

解答・解説

122

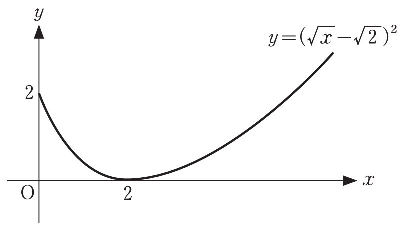
$y=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ $(x \geqq 0)$ において，$x>0$ のとき，

$$y'=2(\sqrt{x}-\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

であるから，y の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	↘	0	↗	$(+\infty)$

よって，曲線 C の概形は次図のようになる．

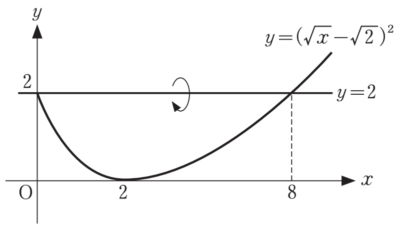


(1)

$$S=\int_0^2(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2\,dx$$
$$=\int_0^2(x-2\sqrt{2}\sqrt{x}+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{4\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x}+2x\right]_0^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}.$$

⑵　曲線 C と直線 $x=2$ の交点において，

$$(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2=2.$$
$$\sqrt{x}-\sqrt{2}=\pm\sqrt{2}.$$
$$x=0,\ 8.$$



$$\begin{aligned} V&=\int_0^8 \pi\{2-(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2\}^2\,dx \\ &=\pi\int_0^8 (x^2-4\sqrt{2}\,x\sqrt{x}+8x)\,dx \\ &=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{8\sqrt{2}}{5}x^2\sqrt{x}+4x^2\right]_0^8 \\ &=\boldsymbol{\frac{256}{15}\pi}. \end{aligned}$$

123

⑴　$k>0$，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$k+1\geqq k+x\geqq k\ \ (>0)$$

であるので，逆数をとると，

$$\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{k+x}\leqq\frac{1}{k}$$

を得る．この不等式の各辺に $1-x$ $(\geqq 0)$ を掛けると，

$$\frac{1}{k+1}(1-x)\leqq\frac{1-x}{k+x}\leqq\frac{1}{k}(1-x). \qquad \cdots①$$

①において，等号は $0<x<1$ では成り立たないので，①を $0\leqq x\leqq 1$ で積分すると，

$$\frac{1}{k+1}\int_0^1(1-x)\,dx<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx <\frac{1}{k}\int_0^1(1-x)\,dx,$$

すなわち，

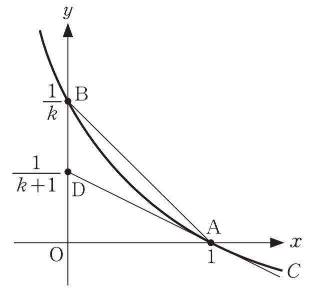
$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}$$

を得る．

(⑴ の別解)

$y=\dfrac{1-x}{k+x}$ のグラフを曲線 C とし，C 上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$ をとる．

また，A における曲線 C の接線と y 軸の交点を D とする．



$$y=\frac{1-x}{k+x}=\frac{k+1}{x+k}-1 \text{ より，}$$
$$y'=-\frac{k+1}{(x+k)^2}$$

であるので，A における接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{k+1}(x-1).$$

したがって，D$\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$ である．また，

$$y''=\frac{2(k+1)}{(x+k)^3}$$

より，$k>0$，$0\leqq x\leqq 1$ で $y''>0$ となるので，曲線 C は $0\leqq x\leqq 1$ において下に凸である．

よって，線分 AB は両端を除いて曲線 C より上にあり，線分 AD は A を除いて曲線 C より下にあるので，曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S について，次の不等式が成立する．

$$\triangle\mathrm{OAD}<S<\triangle\mathrm{OAB} \quad (\text{O は原点})$$

すなわち，

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}.$$

（⑴ の別解終り）

⑵
$$\begin{aligned} &\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx \\ &=\int_0^1\left(\frac{k+1}{x+k}-1\right)dx \\ &=\Big[(k+1)\log(x+k)-x\Big]_0^1 \\ &=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1. \end{aligned}$$

これを⑴で示した不等式に代入すると，

$$\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1<\frac{1}{2k}.$$

数学 Ⅲ

各辺を $k+1\ (>0)$ で割ると,

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}. \quad \cdots②$$

ここで,

$$\frac{1}{2(k+1)^2}>\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right),$$

$$\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

であるので, $\dfrac{1}{k}=A_k$, $\log k=B_k$ とおくと, 不等式②より,

$$\frac{1}{2}(A_{k+1}-A_{k+2})<B_{k+1}-B_k-A_{k+1}<\frac{1}{2}(A_k-A_{k+1}).$$

$k=n$, $n+1$, $n+2$, $\cdots$, $m-1$ について, この不等式の和をとると,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}(A_{k+1}-A_{k+2})<\sum_{k=n}^{m-1}(B_{k+1}-B_k)-\sum_{k=n}^{m-1}A_{k+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}(A_k-A_{k+1}). \quad \cdots③$$

ここでさらに,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}&(A_{k+1}-A_{k+2})\\&=\sum_{k=n}^{m-1}A_{k+1}-\sum_{k=n}^{m-1}A_{k+2}\\&=(A_{n+1}+\boxed{A_{n+2}+A_{n+3}+\cdots+A_m})\\&\quad-(\boxed{A_{n+2}+A_{n+3}+\cdots+A_m}+A_{m+1})\\&=A_{n+1}-A_{m+1}\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\\&=\frac{m-n}{(m+1)(n+1)},\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}(A_k-A_{k+1})&=A_n-A_m\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\\&=\frac{m-n}{mn},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}(B_{k+1}-B_k)&=B_m-B_n\\&=\log m-\log n\\&=\log\frac{m}{n}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}A_{k+1}&=A_{n+1}+A_{n+2}+A_{n+3}+\cdots+A_m\\&=\sum_{k=n+1}^{m}A_k\\&=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

これらを③に代入すると,

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}.$$

【注】 **解答**中の①において,

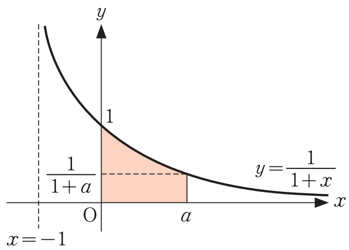
$$y=\frac{1}{k+1}(1-x),\quad y=\frac{1}{k}(1-x)$$

はそれぞれ(1)**の別解**の直線 AD, AB に相当するので, ①は直線 AD, 直線 AB と曲線 C の上下関係を式で表現したものになっている.

(注終り)

124

領域 A を図示すると, 次図の網目部分となる. ただし, 境界を含む.



(1)
$$\begin{aligned}V_1&=\int_0^a\pi\left(\frac{1}{1+x}\right)^2dx\\&=\pi\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^a\\&=\pi\left(-\frac{1}{1+a}+1\right)\\&=\boldsymbol{\frac{a}{1+a}\pi}.\end{aligned}$$

(2) $y=\dfrac{1}{1+x}$ を x について解くと,

$$x=\frac{1}{y}-1$$

であるから，

$$\boldsymbol{V_2}=\pi a^2\cdot\frac{1}{1+a}+\int_{\frac{1}{1+a}}^{1}\pi\left(\frac{1}{y}-1\right)^2 dy$$

$$=\frac{a^2}{1+a}\pi+\pi\int_{\frac{1}{1+a}}^{1}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1\right)dy$$

$$=\frac{a^2}{1+a}\pi+\pi\Big[-\frac{1}{y}-2\log y+y\Big]_{\frac{1}{1+a}}^{1}$$

$$=\frac{a^2}{1+a}\pi+\pi\left(1+a+2\log\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+a}\right)$$

$$\boldsymbol{=2\pi\{a-\log(1+a)\}}.$$

(3)　$V_1-V_2=f(a)$ とおくと，

$$f(a)=\frac{a}{1+a}\pi-2\pi\{a-\log(1+a)\}$$

$(a\geqq 0)$

であるから，$a>0$ のとき，

$$f'(a)=\frac{\pi}{(1+a)^2}-2\pi\left(1-\frac{1}{1+a}\right)$$

$$=\frac{-2a^2-2a+1}{(1+a)^2}\pi.$$

$a\geqq 0$ における $f(a)$ の増減は次のようになる．

a	0	…	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	…
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$	0	↗	極大	↘

したがって，$f(a)$ $(=V_1-V_2)$ は，

$$a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

において，極大かつ最大となる．

よって，

$$\boldsymbol{p=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}.$$

また，

$$1-p=1-\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{3}}{2}>0$$

より，$p<1$ である．

(4)　$f(p)>f(0)=0$,

$$f(1)=\frac{\pi}{2}-2\pi(1-\log 2)$$

$$=\frac{\pi}{2}(4\log 2-3)$$

$$<\frac{\pi}{2}(4\times 0.7-3)$$

$$<0$$

であり，$f(a)$ は連続関数であるから，

$p<a<1$ において，$f(a)=0$ となる a が存在する．したがって，$V_1=V_2$ となる a が存在する．